APRIL/MAY 2023

FMA21/CMA21 — CALCULUS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Find the total differential of $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$.

   $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$ க்கு மொத்த வகைப்படுத்தலை காண்க.

2. Define maximum value of the function.

   ஒரு சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பை வரையறு.

3. Write the formula for angle between the radius vector and tangent in polar co-ordinates.

   ஆர திசைக்கும் தொடுகோட்டு திசைக்கும் இடையே ஆன கோணத்திற்கான போலார் கூறு சூத்திரத்தை எழுதுக.

4. Find the envelope of the family of circles $(x-a)^2 + y^2 = 2a$ where a being a parameter.

   $(x-a)^2 + y^2 = 2a$ என்ற வட்டச் சமன்பாடு குடும்பத்திற்கு தழுவியைக் காண்க, இதில் a என்பது அளவுரு.

4956

13. (a) Find the radius of the curvature of the curve $r = a(1-\cos\theta)$.

$r = a(1-\cos\theta)$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரம் காண்க.

Or

(b) Find the asymptotes of the curve $x^3 - 2y^2 + xy(2x-y) + y(x-1) + 1 = 0$.

$x^3 - 2y^2 + xy(2x-y) + y(x-1) + 1 = 0$ என்ற வளைவரையின் கந்தழி தொடுகோடுகள் காண்க.

14. (a) If n is positive integer, and if $I_n = \int \cos^n x\,dx$, then prove that

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$

n மிகை முழு மற்றும் $I_n = \int \cos^n x\,dx$ எனில்

$I_n = -\frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$ என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that $\beta(m,n) = \beta(n,m)$.

$\beta(m,n) = \beta(n,m)$ என நிறுவுக.

15. (a) Evaluate $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dz\,dy\,dx}{(x+y+z+1)^3}$.

$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dz\,dy\,dx}{(x+y+z+1)^3}$ மதிப்பிடுக.

Or

(b) Evaluate $\int_0^a \int_{x^2/a}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

மதிப்பிடுக $\int_0^a \int_{x^2/a}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If $y = \sin(m\sin^{-1} x)$ prove that $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$.

$y = \sin(m\sin^{-1} x)$ எனில் $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$ என நிறுவுக.

17. Prove that the radius of curvature at any point of the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$ $y = a(1-\cos\theta)$ is $4a\cos(\theta/2)$.

$x = a(\theta + \sin\theta)$ $y = a(1-\cos\theta)$ என்ற உருள்வளைக்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வளைவு ஆரம் $4a\cos(\theta/2)$ என நிறுவுக.

18. Show that the radius of curvature at any point of the catenary $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ is equal to the length of the portion of the normal intercepted between the curve and the axis of x.

$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ என்ற சங்கிலியத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வளைவு ஆரமானது x அச்சிற்கும் வளைவரைக்கும் இடைப்பட்ட செங்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டின் நீளத்திற்கு சமம் என நிறுவுக.

19. Derive the relation between Beta and Gamma functions.

பீட்டா மற்றும் காமா சார்புக்கு இடையேயான தொடர்பை வருவி.

20. By changing the order of integration, evaluate $\int_0^\infty\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dx\,dy$..

தொகையீட்டின் வரிசையை மாற்றி $\int_0^\infty\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dx\,dy$ -ஐ மதிப்பிடுக.

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If $xy = ae^x + be^{-x}$ prove that $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0$.

$xy = ae^x + be^{-x}$ எனில் $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0$ என நிறுவுக.

Or

(b) Find the maximum or minimum value of $x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x$.

$x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x$ -ன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

12. (a) Find p-r equation of the curve $x^2 + y^2 = 2ax$ and hence find the radius of curvature.

$x^2 + y^2 = 2ax$ என்ற வளைவரையின் p-r சமன்பாட்டைக் காண்க. அதிலிருந்து வளைவு ஆரம் காண்க.

Or

(b) For the curves $x^2 = 4y$ and $y^2 = 4x$ find the angle of intersection

$x^2 = 4y$ மற்றும் $y^2 = 4x$ என்ற வளைவரைக்கு கோணத்திற்கான வெட்டும்புள்ளியை கண்டுபிடி.

5. Define asymptotes to the curve.

வரையறு : வளைவரையின் கந்தழி தொடுகோடுகள்.

6. Find the asymptotes of $y^2(x^2-1)=1$.

$y^2(x^2-1)=1$ என்ற சமன்பாட்டின் கந்தழி தொடுகோடுகள் காண்க.

7. Write the reduction formula for $\int \cos^n x\,dx$.

$\int \cos^n x\,dx$ ன் குறைத்தல் வாய்ப்பாட்டை எழுதுக.

8. Define Beta function

வரையறு : பீட்டா சார்பு.

9. Evaluate $\int_0^a \int_0^{\sqrt{ay}} xy\,dx\,dy$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^a \int_0^{\sqrt{ay}} xy\,dx\,dy$.

10. Evaluate $\int_0^a \int_0^b \int_0^c x^2 y\,dz\,dy\,dx$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^a \int_0^b \int_0^c x^2 y\,dz\,dy\,dx$.